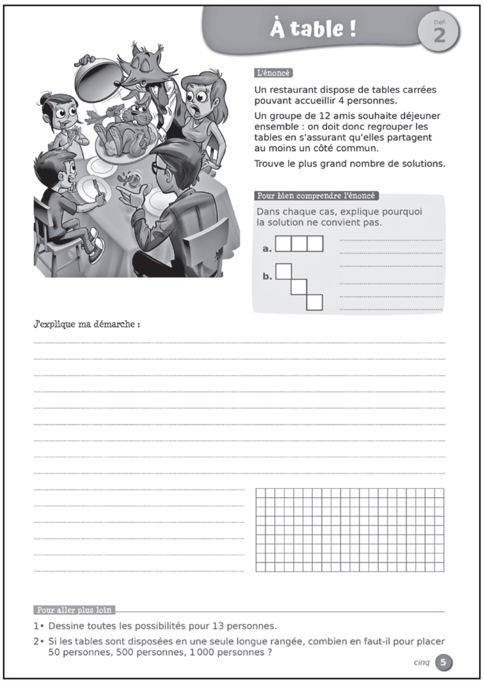
Défi 2

À table !



À table !

Défi 2

L'énoncé

Un restaurant dispose de tables carrées pouvant accueillir 4 personnes.

Un groupe de 12 amis souhaite déjeuner ensemble : on doit donc regrouper les tables en s'assurant qu'elles partagent au moins un côté commun.

Trouve le plus grand nombre de solutions.

Pour bien comprendre l'énoncé

Dans chaque cas, explique pourquoi la solution ne convient pas.

a.

b.

J'explique ma démarche :

Pour aller plus loin

1• Dessine toutes les possibilités pour 13 personnes.

2• Si les tables sont disposées en une seule longue rangée, combien en faut-il pour placer 50 personnes, 500 personnes, 1 000 personnes ?

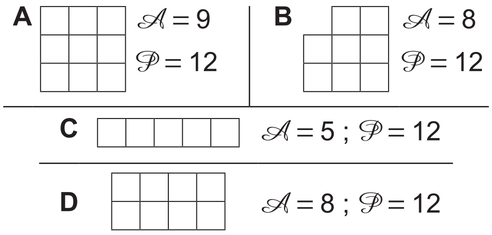
cinq 5

Les élèves explorent différentes configurations en essayant de trouver le plus grand nombre de dispositions de tables possible. On parviendra à la conclusion que toutes les dispositions correspondent à des formes de même périmètre mais d'aire éventuellement différente.

Contexte mathématique

Lors de leurs explorations (sur feuille quadrillée ou en manipulant des pièces carrées), les élèves mobilisent plusieurs concepts mathématiques :
- le périmètre correspondant au nombre de convives
- l'aire représentant le nombre de tables.

On constate que les formes géométriques respectant les consignes ont toutes le même périmètre, mais pas toujours la même aire.



Les questions *Pour aller plus loin* permettent d'aborder d'autres concepts mathématiques :
- la parité (nombre d'invités toujours pair)
- les régularités (algèbre), lorsque les tables sont alignées en une seule rangée.

Ceci peut être généralisé à l'aide d'une formule (Exemple C : nombre de tables $\times$ 2 + 2 extrémités).

Mise en situation et déroulement

L'enseignant questionne les élèves sur leur expérience :

— *Lors d'un repas au restaurant, avez-vous observé comment étaient disposées les tables ?*

Au fur et à mesure des réponses, l'enseignant introduit les règles du défi :
- les tables sont de forme carrée,
- une personne est assise de chaque côté,
- les tables partagent un côté commun dès lors que l'on veut accueillir plus de 4 personnes.

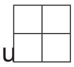
Peu à peu, on quitte le contexte de la vie quotidienne pour explorer un modèle mathématique (décontextualisation).

Pour bien comprendre l'énoncé

Les deux exemples présentés dans ce paragraphe ne respectent pas les règles :

a. La configuration est possible mais ne convient pas à 12 personnes.

b. Les tables ne partagent pas un côté commu



Pour vérifier la compréhension de l'énoncé, l'enseignant peut interroger les élèves sur une configuration de type 2 $\times$ 2 (ci-contre).

Réponse : *Bon agencement mais nombre de places insuffisant.*

Cette réponse démontre qu'une disposition de tables de plus d'une rangée (mais < 3) peut convenir (voir D).

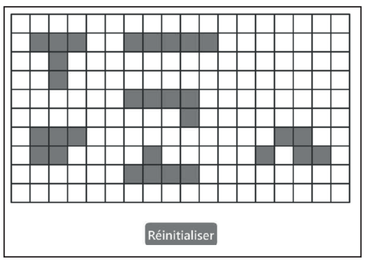
L'enseignant fait remarquer qu'une configuration peut se retrouver disposée différemment, si on la déplace par symétrie ou par rotation.

www.iparcours.fr

***P'tit Rusé* numérique**

Accès gratuit à de nombreux outils de simulation et de modélisation.

DÉFI 2



L'élève clique sur une case pour la colorier.

Stratégies de résolution

L'enseignant met à la disposition des élèves une simple feuille quadrillée ou du matériel de manipulation (pièces de forme carrée par exemple).

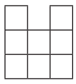
Normalement, les élèves trouveront assez facilement quelques solutions... mais pas toutes ! C'est pourquoi une stratégie de recherche plus systématique doit être proposée.

En procédant par essai-erreur non systématique, certains élèves découvriront surement trois configurations qui modélisent la disposition en rangées : 1 x 5 (C) ; 2 x 4 (D) ; 3 x 3 (A). Ils constateront alors qu'avec une rangée (C), une seule configuration est possible, tandis qu'avec 2 ou 3 rangées, plusieurs possiblités existent. Ainsi, la forme A peut engendrer la forme B : la table du coin gauche de la première rangée a été enlevée. Deux personnes peuvent encore occuper chacun des deux côtés (selon nos règles mathématiques). L'aire perd 1 unité d'aire, mais pas le périmètre.

Une autre stratégie consiste à mener la recherche selon le nombre de tables (entre 5 et 9) : une seule configuration peut être obtenue avec 9 tables (A), mais il y en a plusieurs avec 5, 6, 7 ou 8 tables.

Plusieurs remarques intéressantes peuvent surgir :

— *À table, on ne place jamais des personnes côte à côte, comme dans le coin découpé de la forme B !*

— *Je propose cette configuration avec une personne assise dans le "trou".* 

L'enseignant fait remarquer que ce problème contient deux éléments importants :

- Élément contextuel : dans la vie courante, on peut se permettre plusieurs accomodations pour disposer les tables et les personnes : par exemple, tasser les chaises pour en ajouter une autre.

- Modélisation mathématique : celle-ci suppose une *décontextualisation* ainsi qu'une définition de contraintes plus strictes, généralement non modifiables : ici, la règle *1 côté libre = 1 personne* (peu importe où se trouve ce côté). Cette règle permet de convertir la consigne *avoir 12 personnes* (donc compter 12 côtés libres) en une contrainte mathématique : *avoir le périmètre égal à 12*.

Dans le cas de la configuration avec un "trou", une discussion peut en émerger : dans la vie courante, on évite de placer une personne dans un tel trou. Par ailleurs : pourquoi ne pas en mettre trois puisque trois côtés sont libres ? Cette discussion intéressante montre l'intérêt de la modélisation mathématique de la situation : en effet, si l'on permet cette configuration, alors le périmètre n'est plus égal à 12 !

En cas de difficultés de comptage (notamment le comptage un à un), l'enseignant amène les élèves à trouver des stratégies plus efficaces, telles que l'addition ou la multiplication.

Il peut aussi leur montrer comment mieux s'organiser en marquant les côtés déjà comptés (traits, croix...).

Pour aller plus loin

1. Les élèves seront peut-être surpris de ne rien trouver pour 13 invités. Si certains tentent d'introduire une chaise supplémentaire dans une configuration pour 12 (en modifiant un peu les règles !), il pourra être fertile d'engager une discussion...

Finalement, les élèves conclueront qu'il est sans doute impossible de placer 13 convives. Tout en les encourageant à expliquer pourquoi, l'enseignant les invite à explorer les nombres 14, 15, 16, 17…

On conjecture alors que le nombre de convives doit être pair : "*Pour ajouter une personne, il faut une nouvelle table dont un côté est commun à une table déjà placée. On perd donc une place (côté commun) et on en gagne trois (côtés libres) : on ajoute donc 2 au périmètre ; la parité du nombre total d'invités reste identique".*

2. Si les tables sont disposées en une seule longue rangée, une régularité peut être observée : *nombre de tables* $\times$ *2 côtés + 2 extrémités*. Ainsi :

Pour 50 pers. : $2 \times 24 + 2 = 50$ soit 24 tables
Pour 500 pers. : $2 \times 249 + 2 = 500$ 249 tables
Pour 1 000 pers. : $2 \times 499 + 2 = 1\,000$ 499 tables

Bien sûr, d'autres méthodes pour une généralisation équivalente peuvent être acceptées.

Par leur raisonnement, les élèves émettent et vérifient des hypothèses de façon plus généralisée :

- au sujet de la parité : lorsque l'élève découvre et est en mesure d'expliquer que, dans toute configuration dont le périmètre est un nombre entier, le périmètre doit être un nombre pair.

- au sujet de la disposition en rangée : la structure est décrite par une formule algébrique.

À partir d'une situation de vie courante, une structure mathématique résultant d'un processus de modélisation (à l'aide du matériel de manipulation ou d'un quadrillage) permet d'explorer les concepts géométriques de base, tels que le périmètre et l'aire.

La richesse du modèle permet également d'examiner divers modèles allant jusqu'à une généralisation de nature algébrique.

Solutions

Voici les 24 configurations possibles.