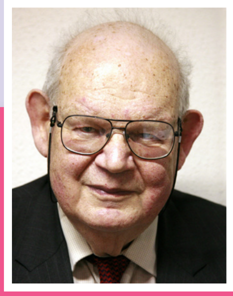
Chapitre 2
Suites arithmétiques et géométriques

Objectifs

- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.



Culture scientifique

Benoît Mandelbrot (1924–2010) est un mathématicien franco-américain, fondateur de la **géométrie fractale**, qui permet de décrire des formes complexes et irrégulières présentes dans la nature. Il a montré que de nombreux phénomènes réels obéissent à des **lois de puissance**, utilisées en mathématiques, en physique, en économie ou encore en sciences sociales. Pionnier de l'usage de l'**outil informatique**, il a adopté une démarche originale fondée sur l'observation des phénomènes avant les théories.

Et sinon, dans la vraie vie ?

Les **suites arithmétiques et géométriques** permettent de modéliser des évolutions régulières que l'on rencontre dans la vie quotidienne.

Une suite arithmétique décrit une évolution où l'on ajoute toujours la même quantité, par exemple une augmentation fixe de salaire ou de dépenses chaque mois. Une suite géométrique modélise une évolution exponentielle, comme un capital qui augmente avec des intérêts composés ou la croissance rapide d'une population.

Ces outils sont largement utilisés dans les métiers de la **finance**, de la **gestion**, des **sciences** et de l'**ingénierie** pour analyser et prévoir des évolutions sur le long terme.

Automatismes

↘ Consolider ses acquis

↘ Calcul numérique et algébrique

1. Calculer $1 - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}$.

2. Calculer $\dfrac{3^{-5} \times 3^2}{3^{-4}}$.

3. Développer $(x-3)^2$.

4. Factoriser $10x^2 - 5x$.

5. Résoudre $x^2 = 25$.

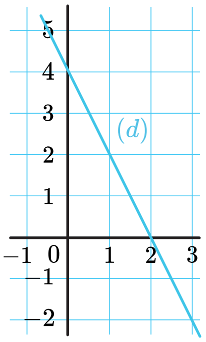
6. On donne $a = \dfrac{v^2}{R}$. Isoler R.

↘ Fonctions et représentations

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par $A(1;2)$ et $B(3;6)$.

2. Le point $C(-5;3)$ appartient-il à la droite d'équation $y = -2x - 8$?

3. Déterminer graphiquement le coefficient directeur de la droite (d) représentée ci-contre.



4. Construire la droite d'équation $y = 3x - 1$.

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$. Calculer $f(-1)$.

6. Déterminer les antécédents de 0 par $g : x \mapsto x^2 - 3x$.

↘ Proportions, pourcentages et évolutions

1. 18 élèves sur 60 suivent l'option musique. Déterminer la proportion des élèves qui suivent l'option musique et l'exprimer en pourcentage.

2. Calculer 25% de 640 €.

3. Exprimer $0{,}4$ sous forme de pourcentage puis sous forme fractionnaire simplifiée.

4. Déterminer le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 18%.

5. Un abonnement mensuel coûte 90 € et augmente de 11%. Calculer son nouveau montant.

6. La taille d'une plante passe de $10\ cm$ à $15\ cm$. Calculer le taux d'évolution.

↘ Statistiques et probabilités

On considère la série suivante :

Valeur	7	9	10	15
Effectif	3	1	2	2

1. Déterminer la proportion (en %) de valeurs inférieures ou égales à 10.

2. Calculer la moyenne de cette série.

3. La médiane de cette série est-elle supérieure à sa moyenne.

4. On considère deux événements A et B. On sait que : $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}2$. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

On a interrogé des élèves pour savoir s'ils préfèrent regarder des films ou écouter de la musique. On choisit un élève au hasard.

	Films	Musique
Garçons	12	8
Filles	10	20

5. Déterminer la probabilité que l'élève choisi préfère écouter de la musique.

6. L'élève choisi est un garçon. Déterminer la probabilité qu'il préfére regarder un film.

Cours et applications directes

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 28

A Suites arithmétiques : définitions

↘ Définition

Une suite est dite **arithmétique** si la différence r entre deux termes consécutifs est constante.

Autrement dit, lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
La constante r est appelée la **raison** de la suite.

Une suite arithmétique (u_n) se définit par la donnée de son premier terme et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple

On donne les premiers termes d'une suite (u_n) : $u_0 = 2$; $u_1 = 6$; $u_2 = 10$; $u_3 = 14$; $u_4 = 18$; $u_5 = 22$.

On remarque que : $u_1 - u_0 = 4$
$u_2 - u_1 = 4$
$u_3 - u_2 = 4$
$u_4 - u_3 = 4$
$u_5 - u_4 = 4$.

On **conjecture** sur les 6 premiers termes que la suite (u_n) semble être une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Exercice résolu

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 3n + 5$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 :
   · $u_0 = 3 \times 0 + 5 = 5$ · $u_1 = 3 \times 1 + 5 = 8$ · $u_2 = 3 \times 2 + 5 = 11$

2. Calculer, pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$.
   $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 5 - (3n+5) = 3$

3. En déduire que la suite (u_n) est une suite arithmétique et préciser la raison.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 3$.

Propriété | Voir démonstration au programme p.211

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$.

Exemple

On peut écrire le terme général de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 4$, on obtient : $u_n = 2 + 4n$.
Pour $n = 0$, on obtient bien $u_0 = 2 + 4 \times 0 = 2$ et pour $n = 1$, $u_1 = 2 + 4 \times 1 = 6$.
On peut alors calculer $u_{10} = 2 + 4 \times 10 = 42$.

Propriété

Relation entre les termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Soit m et p deux entiers naturels : $u_p = u_m + (p - m) \times r$.

Remarque : Pour $m = 0$, on retrouve l'expression explicite : $u_p = u_0 + p \times r$.

Exemple

Soit (v_n) une suite arithmétique de terme initial v_0 et de raison r.

Alors : $v_5 = v_2 + (5 - 2) \times r$ soit $v_5 = v_2 + 3r$.

Si $v_5 = 10$ et $v_2 = 25$, on peut alors écrire $v_5 = v_2 + (5-2)r \iff 10 = 25 + 3r \iff r = -5$.

On peut donc déterminer la raison en connaissant deux termes.

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 29

1

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = -2$.
Exprimer u_n en fonction de n puis calculer u_5.

2. (v_n) est une suite arithmétique telle que $v_1 = -2$ et de raison $r = 4$. Calculer v_7.

3. (w_n) est une suite arithmétique de terme initial w_0 telle que $w_3 = -1$ et $w_9 = 17$. Exprimer w_n en fonction de n.

2

Pour chaque suite proposée, déterminer si elle est arithmétique ou non.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.

2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 5n^2 - 3$.

3. (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -4n + 5$.

3

Un coureur prépare une compétition.
Lors de son premier entraînement, il court $3\ km$. Chaque semaine, il décide d'augmenter sa distance de $0{,}8\ km$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n la distance (en km) parcourue lors de la n-ième semaine, donc $u_1 = 3$.

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

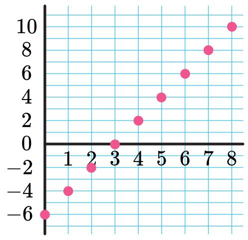
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la distance parcourue à la 10^e semaine.

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique" en indiquant le numéro de page : 30

B Suites arithmétiques : variations et représentation

Propriétés

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
  - La suite (u_n) est **croissante** lorsque r est positif.
  - La suite (u_n) est **décroissante** lorsque r est négatif.
- La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points qui sont alignés.



(u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -6$ et de raison $r = 2$.

C Suites arithmétiques : somme des termes

↘ Théorème | Voir démonstration au programme p.211

Soit n un entier naturel, $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple

La somme des 5 premiers entiers naturels non nuls est $1+2+3+4+5 = \dfrac{5\times(5+1)}{2} = 15$.

Preuve

Posons $S = 1+2+\cdots+n$ et écrivons S dans l'autre sens : $S = n+n-1+n-2+\cdots+2+1$.
Additionnons astucieusement ces deux égalités membre à membre.

$$\begin{array}{rcccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & n \\ + & S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & +\cdots+ & 1 \\ \hline & 2S & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & +\cdots+ & n+1 \end{array}$$

Donc $2S = n(n+1)$ soit $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

D Suites géométriques : définitions

↘ Définition

Une suite est dite **géométrique** si le quotient q entre deux *termes consécutifs non nuls* est constant.
Autrement dit, une suite (u_n) est géométrique lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le quotient q est appelé la **raison** de la suite.

Exemple

On donne les premiers termes : $u_0 = 3$; $u_1 = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = \dfrac{3}{4}$; $u_3 = \dfrac{3}{8}$; $u_4 = \dfrac{3}{16}$; $u_5 = \dfrac{3}{32}$.

On remarque que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{u_5}{u_4} = \dfrac{1}{2}$.

On **conjecture** sur les 6 premiers termes que la suite (u_n) semble être une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Exercice résolu

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par : $u_n = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

   - $u_0 = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 3$
   - $u_1 = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{3}{2}$
   - $u_2 = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\times 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}u_n$.

   Donc $\forall_n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$.

   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de terme initial $u_0 = 3$.

4 Déterminer les variations de la suite arithmétique définie pout tout entier n par $u_n = 3n - 4$.

5 Démontrer que toute suite arithmétique de raison $r > 0$ est strictement croissante.

6 On raconte qu'à l'âge de 7 ans, **Carl Friedrich Gauss** aurait calculé la somme des 100 premiers entiers naturels non nuls plus vite que son maître d'école. **Gauss** s'aperçut que les 100 premiers entiers naturels étaient en progression arithmétique (on ajoute 1 d'un terme à son suivant). Quelle est alors cette somme ?

7 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

8 Dans tout l'exercice, (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

1. On donne $u_0 = 3$ et $q = 2$. Exprimer u_n en fonction de n.

2. On donne $u_5 = 4$ et $q = \dfrac{3}{2}$. Calculer u_2 puis u_{10}.

3. On donne $u_1 = 2$ et $q = -3$. Calculer u_3 puis u_4.

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 32

Propriété | Voir démonstration au programme p.211

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple

La suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -3$ et de raison $q = 2$ a pour forme explicite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3 \times 2^n$.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Soit m et p deux entiers naturels.

$$u_p = u_m \times q^{p-m}$$

Exemple

Soit (v_n) une suite géométrique de terme initial v_0 et de raison q.

Cette formule nous permet d'écrire que : $v_5 = v_2 \times q^{5-2}$ soit $v_5 = v_2 \times q^3$.

Si $v_5 = 27$ et $v_2 = 8$, on peut alors écrire $v_5 = v_2 \times q^3 \iff \dfrac{27}{8} = q^3 \iff q = \dfrac{3}{2}$.

On peut alors déterminer la raison d'une suite géométrique connaissant deux termes.

E Suites géométriques : variations et représentation

Propriété

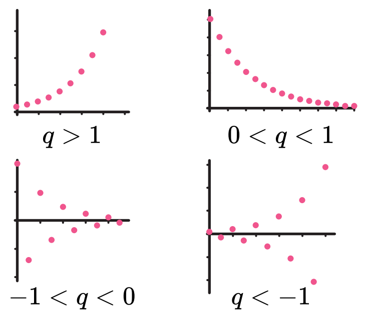
Cas particulier, $u_n = q^n$:

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

Cas général, si (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q :

- Si u_0 est positif, alors la suite (u_n) a le même sens de variation que q^n.
- Si u_0 est négatif, alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de q^n.

Représentation de q^n



F Suites géométriques : somme des termes

↘ Théorème | Voir démonstration au programme p.211

Soit $q \neq 1$ et pour tout entier naturel n, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Preuve

Soit $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, alors $q \times S = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.

On soustrait les deux égalités membre à membre.

$$\begin{array}{rrcl} & S & = & 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \\ - & qS & = & -q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} \\ \hline & (1-q)S & = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

donc si $q \neq 1$, $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercice résolu

Calculer $S = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} + \dfrac{1}{243} + \dfrac{1}{729}$.

$$S = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7\right]$$

9 Dans tout l'exercice, (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0.

1. On donne $u_0 = 1$ et $u_4 = 81$.
   Calculer q puis u_8.

2. On donne $u_{10} = 2$ et $u_{12} = 32$.
   Calculer q puis u_7.

10 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $q = 2$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

11 En Inde, le roi ***Belkib*** s'ennuie à la cour et demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire.

Le sage Sissa invente alors le Chaturanga, l'ancêtre du jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met. Quelle quantité de riz faut-il pour remplir l'échiquier ?

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **34**

1 On considère une suite (u_n) dont on donne trois termes.
Dans chaque cas, à partir de ces termes, dire si la suite (u_n) peut être ou non arithmétique.

1. $u_0 = -5$; $u_1 = 8$ et $u_2 = 21$.

2. $u_0 = 12$; $u_1 = 21$ et $u_2 = 29$.

3. $u_5 = 28$; $u_6 = 15$ et $u_7 = 2$.

4. $u_3 = -4$; $u_4 = -11$ et $u_5 = -19$.

2 La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n.

1. On donne $u_0 = 3$ et $r = -2$.

2. On donne $u_5 = 17$ et $u_{10} = 12$.

3. On donne $u_{22} = 15$ et $r = \dfrac{3}{4}$.

3 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{n}{2}$, pour tout entier n. Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

4 **Rappel sur les puissances** : écrire les nombres donnés sous la forme a^b où a est un réel et b un entier :

$A = 2^5 \times 2^3$ ....

$B = \dfrac{5^7}{5^3}$ ....

$C = \left(2^4\right)^2$ ....

$D = 2^n \times 2$ ....

$E = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ....

$F = \left(\dfrac{1}{9}\right) \times 3^n$ ....

5 On considère une suite (u_n) dont on donne trois termes.
Dans chaque cas, à partir de ces termes, dire si la suite (u_n) peut être ou non géométrique.

1. $u_0 = 3$; $u_1 = 6$ et $u_2 = 10$. ....

....

2. $u_0 = -7$; $u_1 = -14$ et $u_2 = -28$. ....

....

....

3. $u_4 = 81$; $u_5 = 27$ et $u_6 = 9$. ....

....

4. $u_2 = -2$; $u_3 = 4$ et $u_4 = -8$. ....

....

....

6 Dans tout l'exercice, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q.

1. On donne $u_0 = 3$ et $q = 6$. Exprimer u_n puis calculer u_4.

....

2. On donne $u_1 = 2$ et $q = -1$. Exprimer u_n, u_{n+1} puis calculer u_{100}

....

....

3. On donne $u_0 = 5$ et $q = \dfrac{1}{3}$. Exprimer u_n puis u_{n+1}. Calculer u_2.

....

....

7 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 3^n$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

....

....

Compléments numériques

↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 36

1 Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 5n - 3$, pour tout entier n.
Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique. On précisera la raison et le terme initial.

2 Démontrer que les suites sont géométriques, préciser leur raison et leur premier terme.

1. $u_n = (-4)^{2n+1}$

2. $v_n = 2^n \times \dfrac{1}{3^{n+1}}$

3. $w_n = (-1)^n \times 2^{3n+1}$

3 On considère une suite (u_n) arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. On donne $u_2 = 29$ et $u_7 = 64$. Déterminer u_0 et r.

2. En déduire u_{15}

3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15}$

4 On considère une suite (u_n) géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

1. On donne $u_2 = -18$ et $u_5 = 486$. Déterminer u_0 et q.

2. En déduire u_{10}.

3. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

5 Calculer les sommes données.

1. $S_1 = 36 + 39 + 42 + \cdots + 90 + 93$ ....

....

....

....

2. $S_2 = 96 + 192 + 384 + \cdots + 24\,576$ ....

....

....

....

....

6 1. Combien existe-t-il de nombres pairs entre 101 et 625 ? ....

....

2. On propose un code Python ci-dessous. Compléter le code pour qu'il réponde à la question précédente.

```
a=101
cpt=0
while a <....................:
   if a%2 == 0 :
      cpt+=1
   ..................... # Condition d'arrêt du tant que
print (...........)
```

7 BAC

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région.
Au printemps 2019, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.
Il consulte les services spécialisés de la région et s'attend à perdre 8% des colonies chaque hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il prévoit d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps, à partir de l'année suivante.

1. On donne le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo() :
     C = 300
     N = 0
     while C < 400 :
           C = C*0.92+50
           N = N+1
     return(N)
```

a) Compléter, en ajoutant des colonnes, le tableau ci-dessous qui reproduit l'avancement du programme pas à pas. Arrondir les valeurs à l'entier le plus proche.

C	300	326	....	
$C < 400$?	oui	oui	....	

b) Quelle est la valeur de N renvoyée par le programme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

....

.... suite p.38

Le nombre de colonies est modélisé par une suite.
On note C_n une estimation du nombre de colonies au printemps de l'année $2019+n$. Ainsi $C_0=300$ est le nombre de colonies au printemps 2019. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $C_{n+1}=0{,}92C_n+50$.

2. La suite (C_n) est-elle arithmétique ? La suite (C_n) est-elle géométrique ?

3. On admet que $(C_n)=625-325\times 0{,}92^n$ pour tout entier naturel n.
L'apiculteur pourra-t-il atteindre les 700 colonies ?

8 Une entreprise consomme 500 unités d'énergie en 2020.
Chaque année :
- elle réduit sa consommation de 5% par rapport à l'année précédente ;
- mais elle ajoute en parallèle 10 unités d'énergie à sa consommation (nouveaux équipements).

On suppose que cette évolution reste la même au fil des années. On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente la consommation d'énergie en unités en $2020+n$. On a donc $u_0=500$.

1. Calculer u_1 puis u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

3. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=0{,}95\times u_n+10$.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-200$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

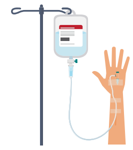
5. À partir de quelle année la consommation d'énergie de l'entreprise sera-t-elle plus basse que 280 unités ? Justifier.

6. Peut-on dire que la consommation tend vers une valeur limite au fil des années ?

Exercices à résolution longue

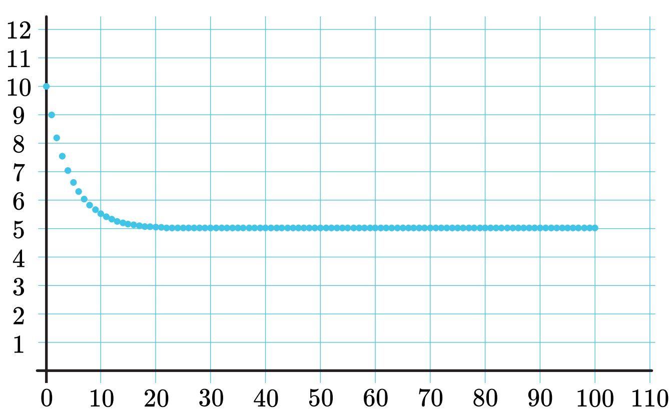
9 BAC

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse.
La première injection est de $10\ ml$, puis, toutes les heures, on lui en injecte $1\ ml$.



On étudie l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang en prenant le modèle suivant :
- on estime que 20% de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure ;
- pour tout entier naturel n, on note U_n la quantité de médicament en ml présente dans le sang au bout de n heures. Ainsi, $U_0 = 10$.

1. Justifier que $U_1 = 9$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}8U_n + 1$.
3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la suite (U_n). Conjecturer la limite de la suite (U_n).



4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous. À quoi sert cet algorithme ?

```
U ← 10
N ← 0
Tant que U > 5,1 faire
    U ← 0,8*U + 1
    N ← N + 1
Fin du tant que
Afficher N
```

5. À l'aide de l'extrait du tableau de valeurs de la suite (U_n) donné ci-dessous, donner la valeur de N à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

n	8	9	10	11	12
U_n	5,838861	5,671089	5,536871	5,429497	5,343597

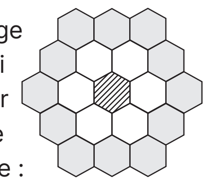
13	14	15	16	17	18
5,274878	5,219902	5,175922	5,140737	5,11259	5,090072

19	20	21	22	23
5,072058	5,057646	5,046117	5,036893	5,029515

24	25	26	27	28
5,023612	5,018889	5,015112	5,012089	5,009671

10 BAC

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce. Le carrelage choisi a une forme hexagonale. Il pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :



- Étape 1 : il entoure le carreau central à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
- Étape 2 et étapes suivantes : il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.

On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la n-ième étape $(n \geq 1)$. Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?
2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ? Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n$.
5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la n-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$. À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son $2\,977^{\text{e}}$ carreau. Combien a-t-il fait d'étapes ?

11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. On définit ainsi la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique, dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 < u_n \leq 1$.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **40**

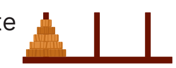
Exercices à résolution longue

1 On considère la somme : $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

On souhaite démontrer que : $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. Développer l'expression : $(n+1)^3 - n^3$
2. En déduire une expression de n^2 en fonction de $(n+1)^3 - n^3$, n et d'une constante.
3. En sommant l'égalité obtenue de $n = 1$ à $n = N$, montrer que la somme des carrés peut s'exprimer à l'aide des cubes.
4. Conclure que :
$$1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

2 Le jeu des **Tours de Hanoï** est un casse-tête inventé par le mathématicien français **Édouard Lucas**. Il consiste en trois tiges et n disques de diamètres différents.



<u>Règles du jeu</u> : On ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois. Un disque ne peut jamais être posé sur un disque plus petit que lui. On note H_n le nombre **minimal** de déplacements nécessaires pour transférer une pile de n disques de la tige A vers la tige C.

Partie A - L'observation

1. Par observation, déterminer les valeurs de H_1, H_2 et H_3.
2. Pour déplacer $n+1$ disques, la stratégie optimale consiste à :
   - Déplacer les n premiers disques vers la tige intermédiaire.
   - Déplacer le plus grand disque vers la tige finale.
   - Déplacer à nouveau les n disques vers la tige finale.

   Justifiez que la suite (H_n) vérifie la relation de récurrence suivante : $H_{n+1} = 2H_n + 1$ avec $H_1 = 1$.

Partie B - Étude de la suite (H_n)

On souhaite exprimer H_n en fonction de n.
Pour cela, on introduit une suite auxiliaire (u_n) définie par : $u_n = H_n + 1$.

1. Montrez que la suite (u_n) est une **suite géométrique** de raison $q = 2$. Précisez son premier terme u_1.
2. Exprimez u_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1 : H_n = 2^n - 1$.

Partie C - La légende

Une légende prétend que dans un temple indien, des moines déplacent une tour de 64 disques d'or.
Ils effectuent un mouvement par seconde.

1. Calculez le nombre de déplacements nécessaires pour $n = 64$. On donnera une valeur approchée en écriture scientifique.
2. Sachant qu'une année dure environ $3{,}15 \times 10^7$ secondes, déterminez en années le temps nécessaire pour achever ce travail.
3. Comparez ce résultat à l'âge estimé de l'Univers (environ $13{,}8$ milliards d'années).

3 On souhaite démontrer que la somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme des n premiers entiers, soit :
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
On définit la suite S_n comme la somme des n premiers entiers : $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. a) Calculer $(S_1)^2$, $(S_2)^2$, $(S_3)^2$.

   b) Vérifiez qu'ils correspondent respectivement à 1^3, $1^3 + 2^3$ et $1^3 + 2^3 + 3^3$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $(S_k)^2 - (S_{k-1})^2 = k^3$.
3. En remarquant que :
$$(S_n)^2 = \left[(S_n)^2 - (S_{n-1})^2\right] + \cdots + \left[(S_1)^2 - (S_0)^2\right]$$
en déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (S_n)^2$.
4. Caculer $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$.

4 

Un investisseur dépose $3\,000$ euros sur un compte rémunéré à 2% par an.
Chaque année suivante, il dépose 400 euros de plus.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}02u_n + 400$ et $u_0 = 3\,000$.
La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

1. À l'aide d'un tableur, calculer la somme totale épargnée à la 10^{e} année.
2. Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 20\,000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat de la question 1. par le calcul.
5. Étudier les variations de (u_n). Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
6. Calculer la limite de (u_n). Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Méthodes

Les méthodes à connaître

Nature d'une suite

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2 + 1$.

La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

Calcul des premiers termes

Étude des différences

Étude des rapports

Suite arithmétique

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = -3n + 5$.
Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

Étude de la différence entre deux termes consécutifs : $u_{n+1} - u_n$.

Suite géométrique

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{5 \times 3^n}{2^{n+1}}$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Exprimer u_{n+1} sous la forme $q \times u_n$

Autoévaluation

Corrigé QCM
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : 42

QCM · Pour chacune des 10 questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Ma note ..... / 10

1 La forme explicite de la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_1 = 3$ et de raison 4 s'écrit :

a. ☐ $u_n = 3 + 4n$
b. ☐ $u_n = 4n - 1$
c. ☐ $u_n = 4 + 3n$

2 Quel est le sens de variation de la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2 + 2n - 2$?

a. ☐ Croissante
b. ☐ Décroissante
c. ☐ Non monotone

3 On donne la suite $u_n = 3n^2 + n - 2$.

a. ☐ $u_1 = 0$
b. ☐ $u_2 = 12$
c. ☐ $u_3 = 28$

4 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -3$. Quelle est la valeur de u_{10} ?

a. ☐ 35
b. ☐ -25
c. ☐ -22

5 Si (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 12$ et $u_5 = 20$, quelle est sa raison r ?

a. ☐ 8
b. ☐ 2
c. ☐ 4

6 Une suite géométrique (v_n) a pour premier terme $v_0 = 2$ et pour raison $q = 3$.
Quelle est l'expression de v_n en fonction de n ?

a. ☐ $v_n = 6^n$
b. ☐ $v_n = 3 \times 2^n$
c. ☐ $v_n = 2 \times 3^n$

7 Quel est le sens de variation d'une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -4$ et de raison $q = 2$?

a. ☐ Croissante
b. ☐ Décroissante
c. ☐ Non monotone

8 On considère une suite arithmétique où $u_0 = 2$ et $r = 5$. Laquelle de ces affirmations est vraie ?

a. ☐ $u_{n+1} - u_n = 5$
b. ☐ $u_{10} = 52$
c. ☐ La suite est décroissante

9 La somme $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50$ est égale à :

a. ☐ $1\,275$
b. ☐ 56
c. ☐ $1\,250$

10 Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors :

a. ☐ $b = a \times c$
b. ☐ $2b = a + c$
c. ☐ $b = a + c$

Algorithmique, TICE & logique

Compléments numériques
↘ *Sur Sacado via votre ENT*
À consulter dans "Livre numérique"
en indiquant le numéro de page : **43**

1 Vrai ou faux ?

Prouver que les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Toute suite arithmétique de raison $r=2$ est strictement croissante.

2) Toute suite géométrique de raison $q=2$ est strictement croissante.

3) Il existe une suite (w_n) qui est strictement croissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \neq +\infty$.

4) Soit (t_n) une suite géométrique de premier terme $t_0=2$ et de raison strictement positive. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_{n0}<0$.

2 Un village a décidé d'organiser un marché forain. Pour le premier marché, en 2022, il a recueilli 110 inscriptions. D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90% des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.

On désigne par u_n le nombre d'exposants en $2022+n$ avec n un entier naturel.

Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2022, soit $u_0=110$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}9u_n+30$.
Le maire accorde 250 places à l'organisateur du marché qui souhaite faire une fonction qui détermine l'année à partir de laquelle 250 places ne seront pas suffisantes.

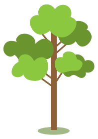
1. Compléter la fonction `Seuil()` ci-dessous pour que `Seuil(A)` renvoie l'année à partir de laquelle le nombre `A` sera dépassé.

```python
def Seuil(A) :
    n=0
    u=....
    while u ....A :
      u = ............
      n = ...........
    return(........)
```

2. Déterminer l'année à partir de laquelle les 250 places ne seront plus suffisantes, en exécutant la fonction `Seuil(250)` dans une console Python.

... suite p.44

3. Que renvoie le programme si l'on choisit une valeur de $A \geq 300$?



3 Le premier janvier de l'année zéro, un arbre mesure $2\ m$. Chaque année, sa hauteur augmente de 5%.
On appelle h_n la hauteur (en mètres) de l'arbre au bout de n années, de sorte que $h_0 = 2$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.

2. Écrire une fonction Python `Année()` qui prend en entrée un nombre x qui représente une hauteur, et qui renvoie le nombre d'années n à partir de laquelle la hauteur de l'arbre dépassera x mètres.

3. En exécutant votre fonction dans une console Python, déterminer au bout de combien d'années l'arbre dépassera $5\ m$.