

Droites remarquables dans un triangle

G3



g5.re/7ke

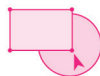


g5.re/kz6



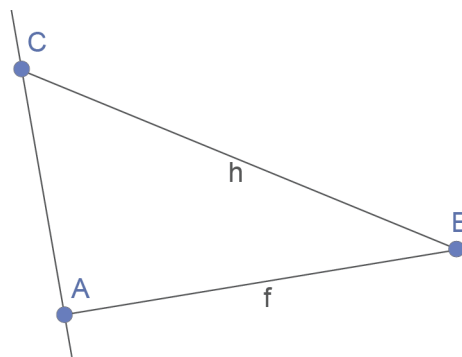
g5.re/y3q

Activité 1 Cercle circonscrit



À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis un segment $[AB]$ puis place un point C sur la perpendiculaire à (AB) passant par A .

- a Quelle est la nature du triangle ABC ?
- b Construis le point O , centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?
- c Où semble se trouver le point O ? Vérifie ta conjecture en déplaçant les points A , B et C .



Activité 2 Triangles et médianes

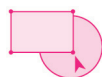
- a Trace un triangle ABC , tel que $AB = 7\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$ et $CB = 5\text{ cm}$.

On appelle **médiane issue de A** dans le triangle ABC la droite qui passe par A et par le milieu de $[BC]$.

- b Trace la médiane issue de A .
- c Trace les médianes issues de B et de C . Que remarques-tu ?



Activité 3 Triangle et hauteur



- a À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, trace un triangle EFG .

On appelle **hauteur issue de E** dans le triangle EFG la droite qui passe par E et qui est perpendiculaire à (FG) .

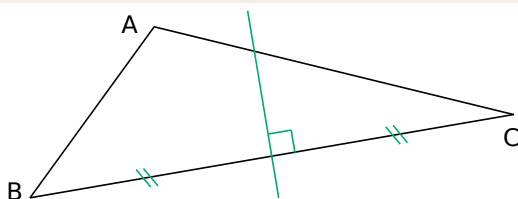
- b Trace la hauteur issue de E .
- c Trace les hauteurs issues de F et de G . Déplace les points E , F et G . Que remarques-tu ?



1 Définitions

A Médiatrices

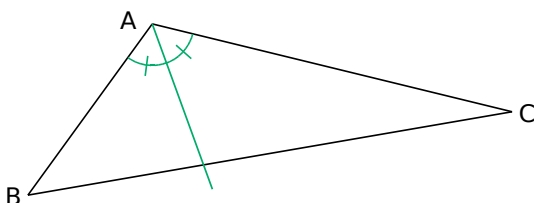
Définition La **médiatrice d'un segment** est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.



On a tracé la **médiatrice** du côté [BC].

B Bissectrice

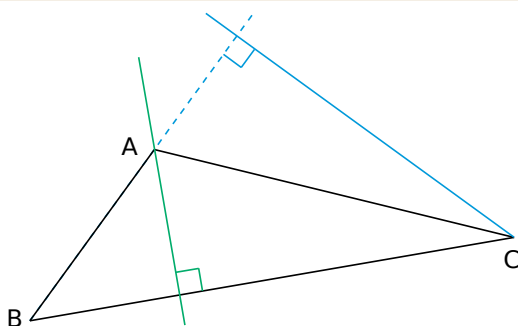
Définition La **bissectrice d'un angle** est la droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.



On a tracé la **bissectrice** de l'angle $\widehat{BAC}$.

C Hauteurs

Définition Dans un triangle, une **hauteur** est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

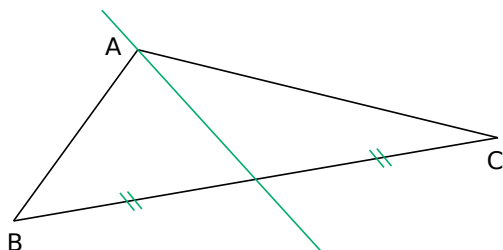


On a tracé :

- la **hauteur issue de A** qui traverse le triangle ABC ;
- la **hauteur issue de C** qui est extérieure au triangle ABC.

D Médianes

Définition Dans un triangle, une **médiane** est une droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.



On a tracé la **médiane** issue de A.

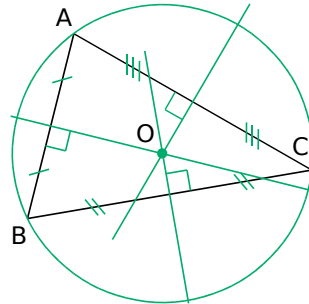
2 Concurrency of remarkable lines in a triangle

A Médiatrices

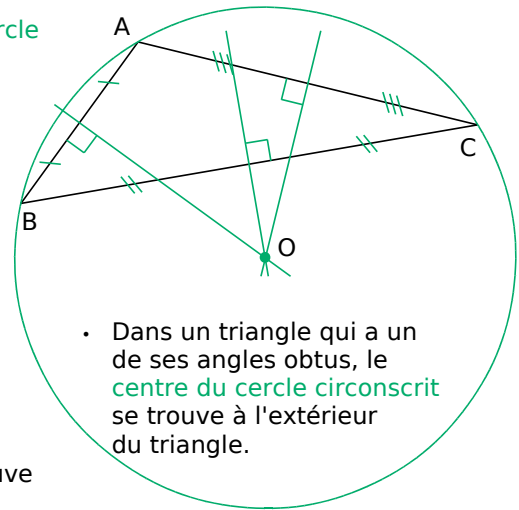
Propriété

Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont **concurrentes en un point** qui est le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.

Le point O est le **centre du cercle circonscrit** au triangle ABC.



- Dans un triangle qui a tous ses angles aigus, le **centre du cercle circonscrit** se trouve à l'intérieur du triangle.

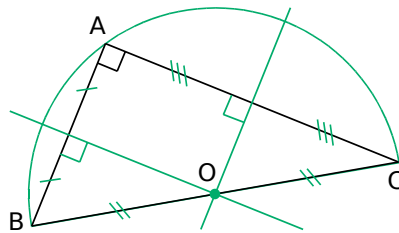


- Dans un triangle qui a un de ses angles obtus, le **centre du cercle circonscrit** se trouve à l'extérieur du triangle.

B Médiatrices et triangle rectangle

Propriété

Un triangle rectangle est inscrit dans un **demi-cercle** de diamètre son hypoténuse.



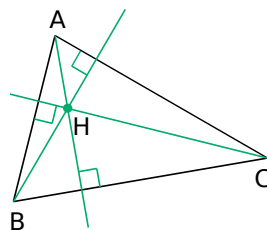
Le milieu O de l'hypoténuse [BC] est le **centre du cercle circonscrit** au triangle ABC rectangle en A.

C Hauteurs

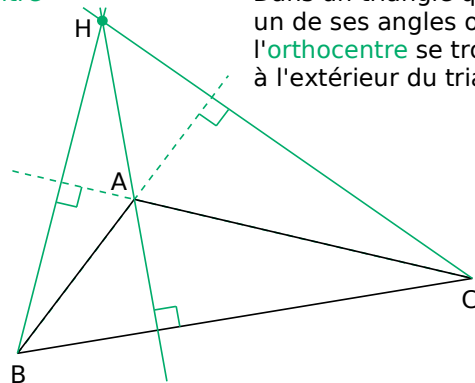
Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concurrentes en un point** qui est l'**orthocentre** de ce triangle.

Le point H est l'**orthocentre** du triangle ABC.



- Dans un triangle qui a tous ses angles aigus, l'**orthocentre** se trouve à l'intérieur du triangle.

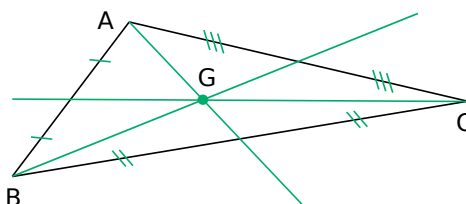


- Dans un triangle qui a un de ses angles obtus, l'**orthocentre** se trouve à l'extérieur du triangle.

D Médianes

Propriété

Les trois médianes d'un triangle sont **concurrentes en un point** qui est le **centre de gravité** de ce triangle.



Le **centre de gravité** est toujours à l'intérieur du triangle.

Le point G est le **centre de gravité** du triangle ABC.

Médiatrices, bissectrices

1 QCM

a. Si I est sur la médiatrice de [EF], alors...

R.1	R.2	R.3
EI = EF	IF = EF	IE = IF

b. Si O appartient à la médiatrice de [EF], alors...

R.1	R.2	R.3
E et O sont situés sur un cercle de centre F	E et F sont situés sur un cercle de centre O	O et F sont situés sur un cercle de centre E

2 Dans chaque cas, construis le triangle ABC puis son cercle circonscrit. (Soit O son centre.)

- $AB = 7$ cm, $\widehat{ABC} = 55^\circ$ et $\widehat{BAC} = 35^\circ$.
- ABC est isocèle en C tel que $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm.
- ABC est rectangle en A tel que $AB = 6,5$ cm $\widehat{ABC}$ et 65°
- ABC est un triangle équilatéral de côté 5,5 cm.

3 Triangle rectangle (1)

- Construis un triangle USM rectangle en S tel que $UM = 7$ cm et $\widehat{MUS} = 30^\circ$.
- Place le point O, centre du cercle circonscrit à USM, uniquement avec la règle graduée. Justifie.
- Détermine la longueur OS. Justifie.

4 Triangle rectangle (2)

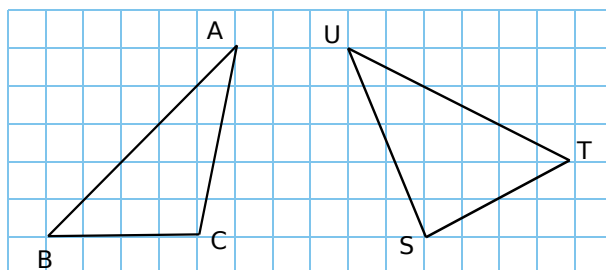
- Construis un triangle MNP rectangle en M tel que $PM = 5$ cm et $MN = 6$ cm.
- Construis le point I milieu de [PM]. Construis les cercles circonscrits à MNI et MNP.

5 Tracés de médiatrices d'un triangle

- Construis un triangle CJR.
- Trace en rouge la médiatrice de [JR] à l'aide du compas.
- Trace en noir la médiatrice de [CJ] avec la règle graduée et l'équerre.
- Construis la médiatrice (m) de [CR] uniquement avec une équerre non graduée. Justifie.
- Comment construire (m) avec uniquement une règle graduée ? Explique ta réponse.

6 Reproduis cette figure sur ton cahier.

Trace la bissectrice de $\widehat{ABC}$ pour le triangle ABC, et celle de $\widehat{SUT}$ pour le triangle STU.



7 Triangles et bissectrices

a. Construis le triangle TOP tel que :

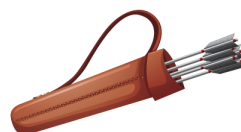
$TO = 5,4$ cm ; $\widehat{TOP} = 55^\circ$

et $\widehat{OTP} = 49^\circ$. Puis construis la bissectrice de l'angle $\widehat{TPO}$.

b. Construis le triangle QTD tel que :

$QT = 7$ cm ; $TD = 5$ cm

et $\widehat{QTD} = 96^\circ$. Puis construis la bissectrice de l'angle $\widehat{QTD}$.



8 Construis le triangle LOC isocèle en O tel que : $LC = 7,4$ cm et $LO = 5,4$ cm. Puis construis les bissectrices des trois angles de ce triangle.

9 Géométrie dynamique

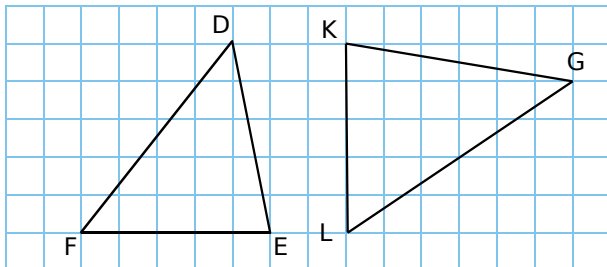
- Construis un triangle CDJ.
- Construis la médiatrice (d) de [CD].
- Construis la bissectrice (d') de $\widehat{CJD}$.
- Déplace le point J. Dans quel cas les droites (d) et (d') sont-elles confondues ?

10 [EF] est une corde d'un cercle de centre O.

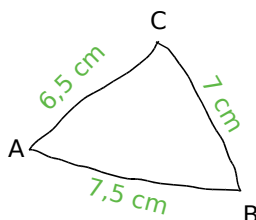
- Fais un schéma.
- Démontre que la médiatrice du segment [EF] passe par le point O.
- Déduis-en une façon de construire le milieu I de [EF] uniquement avec une équerre. Explique ta construction.

Hauteurs

11 Reproduis ces figures sur ton cahier. Trace la hauteur issue de D pour le triangle DEF, et celle issue de G pour le triangle KLG.



12 Construis le triangle ABC ci-dessous, puis construis la hauteur issue de A.



13 Construis le triangle CAR tel que : $CA = 4,6 \text{ cm}$; $AR = 4,3 \text{ cm}$ et $\widehat{CAR} = 102^\circ$. Trace la hauteur issue de R, puis celle issue de C.

14 Construis un triangle TAX tel que : $TA = 6,3 \text{ cm}$; $\widehat{TAX} = 57^\circ$ et $\widehat{ATX} = 63^\circ$. Puis trace ses hauteurs.

15 Construis un triangle BUS tel que : $BU = 6,4 \text{ cm}$; $US = 4,8 \text{ cm}$ et $BS = 8 \text{ cm}$. Construis le point H, orthocentre de ce triangle.

16 Reproduis les triangle DEF et KLG de l'exercice 11, puis construis leurs orthocentres.

17 Prenons de la hauteur !

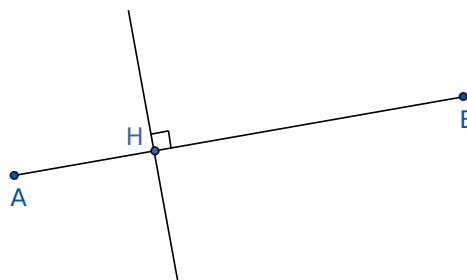
- Construis un triangle DER ayant tous ses angles aigus, puis les hauteurs de ce triangle.
- Construis un triangle NRV, tel que $\widehat{NRV}$ soit un angle obtus, puis les hauteurs de ce triangle.
- Construis un triangle GHT rectangle en T, puis les hauteurs de ce triangle.
- Observe les trois figures. Que remarques-tu ?

18 Géométrie dynamique

- Construis deux droites sécantes en H.
- Construis un triangle ayant pour hauteurs les deux droites tracées.
- Y a-t-il plusieurs solutions possibles ? Si oui, propose quelques figures.

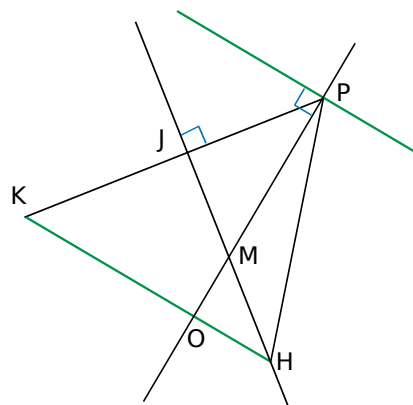
19 Géométrie dynamique

- Construis :
 - un segment $[AB]$ de longueur 7 cm ;
 - le point H de $[AB]$ tel que $AH = 2 \text{ cm}$;
 - la perpendiculaire à $[AB]$ passant par H.



- On considère un point C tel que la droite (CH) soit la hauteur du triangle ABC. ABC peut-il être isocèle en C ?
- Construis le point C tel que ABC soit isocèle en B. Y a-t-il une seule possibilité ?

20 Les droites vertes sont parallèles. Détermine les hauteurs du triangle KPM. Justifie.

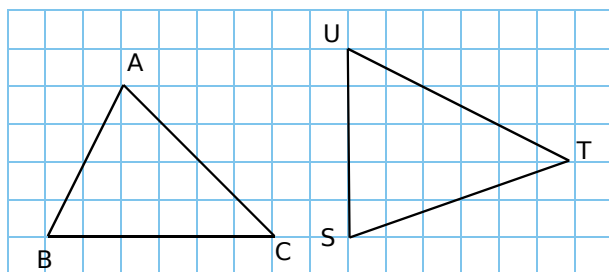


21 Construis un triangle PIG tel que : $PI = 5 \text{ cm}$, $\widehat{IPG} = 120^\circ$ et $\widehat{PIG} = 30^\circ$.

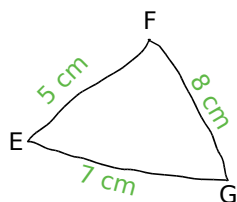
- Construis la hauteur issue de G.
- Construis la médiatrice de $[PI]$.
- Démontre que les deux droites tracées sont parallèles.

Médianes

22 Reproduis ces figures sur ton cahier. Trace la médiane issue de A pour le triangle ABC, et celle issue de T pour le triangle STU.



23 Construis le triangle EFG ci-dessous, puis construis la médiane issue de G.



24 Construis un triangle POL tel que : $PO = 4,5 \text{ cm}$; $OL = 4,8 \text{ cm}$ et $LP = 4 \text{ cm}$. Trace la médiane issue de P de ce triangle.

25 Construis un triangle QUA tel que : $QU = 2 \text{ cm}$; $UA = 5,4 \text{ cm}$ et $\widehat{QUA} = 93^\circ$. Trace toutes les médianes de ce triangle.

26 Construis un triangle MAC tel que : $MA = 5,8 \text{ cm}$; $MC = 6,4 \text{ cm}$ et $\widehat{AMC} = 55^\circ$. Construis le centre de gravité de ce triangle.

27 Construis un triangle REC isocèle en C tel que $RE = 6 \text{ cm}$ et $\widehat{REC} = 40^\circ$. Construis le centre de gravité de ce triangle.

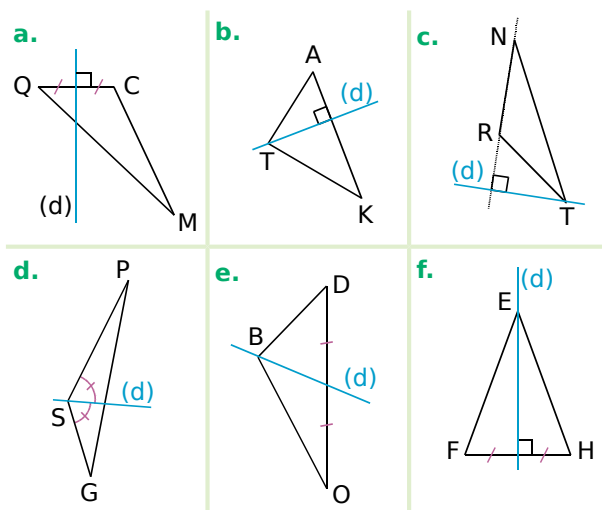
28 Reproduis les triangles ABC et UST de l'exercice 22, puis construis leurs centres de gravité.

29  **Géométrie dynamique**

- Construis un triangle ABC et son centre de gravité G.
- Déplace les points A, B et C. G peut-il être extérieur au triangle ?

Droites remarquables

30 Dans chaque cas, décris précisément la droite (d) en utilisant les mots : **médiatrice**, **bissectrice**, **médiane** et **hauteur**.



31 **Vocabulaire**

- Construis un triangle BOA. Trace la droite (d_1) perpendiculaire à $[BO]$ et passant par A.
- Trace la droite (d_2) perpendiculaire au segment $[OA]$ et passant par son milieu.
- Trace la droite (d_3) qui coupe l'angle $\widehat{BOA}$ en deux angles égaux.
- Trace la droite (d_4) qui passe par O et par le milieu de $[BA]$.
- Reformule la consigne de cet exercice en utilisant les mots : **médiatrice**, **bissectrice**, **médiane** et **hauteur**.

32  **Géométrie dynamique**

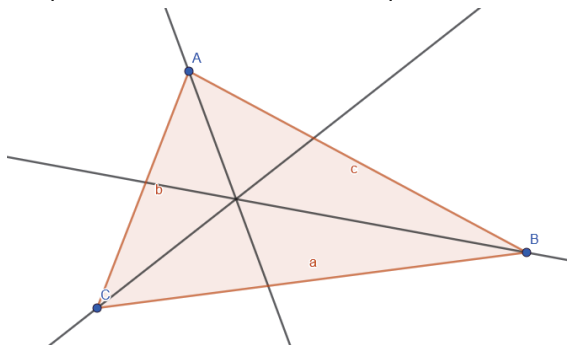
- Construis un triangle EFG isocèle en G.
- Construis la hauteur de ce triangle issue de G.
- Construis la médiane de ce triangle issue de G.
- Construis la bissectrice de l'angle $\widehat{EGF}$.
- Que remarques-tu ?

33 **Tracés à main levée et codages**

- Construis un triangle TOC à la règle.
- À main levée, trace puis code :
 - en bleu, la médiatrice de $[TO]$;
 - en noir, la médiane relative à $[OC]$;
 - en rouge, la hauteur issue de O ;
 - en vert, la bissectrice de l'angle $\widehat{TOC}$.

34 Géométrie dynamique

a. Construis un triangle ABC puis les trois bissectrices des angles du triangle ABC. Déplace les points A, B et C. Que remarques-tu ?



b. Soit I le point d'intersection des bissectrices. Construis la perpendiculaire à (AB) passant par I. Elle coupe la droite (AB) en J.

c. Construis le cercle de centre I passant par J. Que remarques-tu ? Ce cercle s'appelle le cercle inscrit au triangle ABC.

35 Bissectrices

a. Trace deux droites (LN) et (JF) sécantes en A. Trace les segments [JN] et [FL].

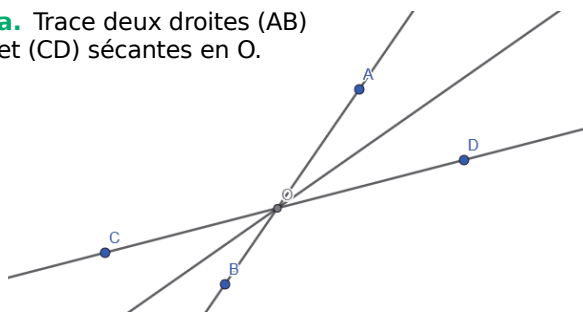
b. Trace, avec le rapporteur et la règle, la bissectrice issue de A dans le triangle AJN.

c. Trace, avec la règle et le compas, la bissectrice de l'angle $\widehat{FAL}$.

d. Observe la figure. Que peux-tu dire de ces deux bissectrices ?

36 Géométrie dynamique

a. Trace deux droites (AB) et (CD) sécantes en O.



b. Construis la bissectrice (d) de l'angle $\widehat{AOD}$.

c. Place un point I sur (d).

d. La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe (AB) en J.

e. La perpendiculaire à (CD) passant par I coupe (CD) en K.

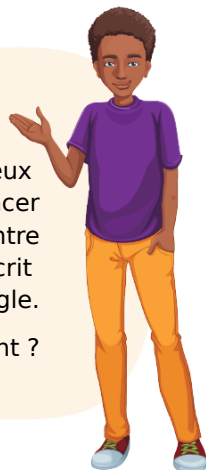
f. Affiche les longueurs IJ et IK. Déplace le point I. Que remarques-tu ?

37 On en parle...

Que penses-tu des réflexions de ces élèves ?

1

Si le triangle est rectangle, je peux immédiatement placer l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Mais où précisément ?



2

Il y a une catégorie de triangles pour laquelle l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont confondus. Mais laquelle ?



3

Si le triangle possède un angle obtus, alors son centre de gravité se situe à l'extérieur du triangle.



4

L'orthocentre d'un triangle est toujours situé à l'intérieur du triangle.



38

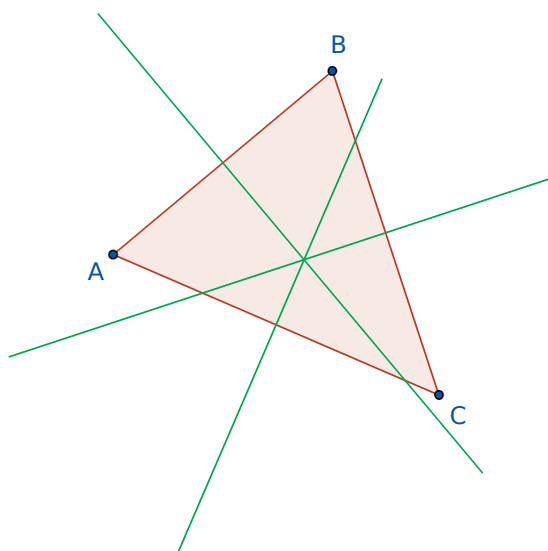


Géométrie dynamique

Le cercle d'Euler

Utilise un logiciel de géométrie dynamique pour effectuer la construction suivante.

- Construis un triangle ABC.
- Construis en vert les médiatrices des côtés du triangle.
- Déplace les sommets du triangle.
 - Que remarques-tu ?
 - Appelle O leur point d'intersection.
- Construis en rouge le cercle de centre O passant par A.
 - Que remarques-tu ?



- Construis en bleu les trois hauteurs du triangle.
 - Quelle conjecture peux-tu faire ?
 - Appelle H leur point d'intersection.
 - Déplace les sommets du triangle. Les points O et H sont-ils toujours à l'intérieur du triangle ?
 - Selon toi, à quelle condition ces points sont-ils à l'intérieur du triangle ?
 - Peut-on avoir O et H sur un côté du triangle ? Sur un sommet ?
- Construis les milieux des trois côtés du triangle et, en vert, les segments joignant chaque sommet au milieu du côté opposé. Ces segments sont les médianes du triangle.
 - Quelle conjecture peux-tu faire ?
 - Appelle G leur point d'intersection.
 - Est-il possible d'avoir ce point G à l'extérieur du triangle ?
 - Te semble-t-il possible d'avoir les trois points O, H et G confondus ?

- Construis en orange la droite (OH). Cette droite est appelée la droite d'Euler.

• Que remarques-tu ?

- Construis en orange le cercle de centre le milieu du segment [OH], et passant par le milieu du segment [AB].

Ce cercle est appelé le cercle d'Euler.

• Par quels points remarquables de la figure semble passer ce cercle ?



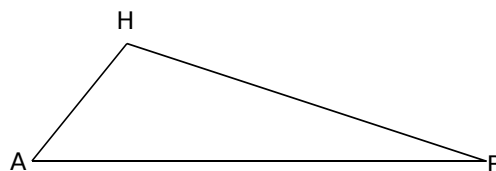
Leonhard Euler (1707 - 1783)
est un mathématicien et physicien suisse.

- Retrouve sur Internet les notations qu'il a introduites en mathématiques. Tu retrouveras certaines d'entre elles pendant tes années de collège.

39

Le troisième sommet

- Construis un triangle ABH tel que $AB = 6$ cm, $AH = 2$ cm et $BH = 5$ cm.



- Construis le point C tel que H soit l'orthocentre du triangle ABC.
- Que représente le point C pour le triangle ABH ? Justifie.